我是8位的

I am 8 bits, what about you?

单变量微积分笔记23——部分分式

求解被积函数是部分分式P(x)/Q(x)的积分，P(x)和Q(x)是关于x多项式。如果不能求出这类积分的原函数，结果将令人沮丧，现在我们要试图寻找一个有效的方法求解这类问题。

选定系数法

$$\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=?$$

这个很容易：

$$\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{3}{x+2}dx=\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$$

但是如果将其写成：$\int\frac{4x-1}{x^2+x-2}\,dx$ 看起来就不那么容易求解了。这就要求我们能够去掉部分分式的伪装，也就是展开部分分式，变成我们熟悉的被积函数。

首先对被积函数的分母进行因式分解，利用初中的十字相乘法：

$$\frac{4x-1}{x^2+x-2}=\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}$$

再将其拆分为新的等式：

$$\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

最后再求出A和B，这需要一点技巧。现将等式两边都乘以x – 1， 以便消去其中一个分式的分母：

$$\frac{4x-1}{x+2}=A+\frac{B(x-1)}{x+2}$$

将x = 1代入等式，这样就可以消去B的分式，直接求得A：

$$\frac{4-1}{1+2}=A，\ A=1$$

用同样的方法可求得B = 3。于是：

$$\int\frac{4x-1}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right)dx=\ln|x-1|+3\ln|x+2|+C$$

掩盖法能够工作必须满足两个条件：

1. Q(x)能够被因是分解；
2. P(x)的最高次数 < Q(x)的最高次数

展开部分分式

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2+2}}{\boldsymbol{(x-1)^2(x+2)}}\boldsymbol{dx} = ?$$

这里不能直接展开成：$\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+2}$，这是无法求解的。对于分母是高次项的部分分式，其展开的形态应当型如：

$$\frac{A}{(x+1)^3}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}$$

所以：

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{x^2+2}{(x-1)^2}=\frac{A(x+2)}{x-1}+\frac{B(x+2)}{(x-1)^2}+C, when\ x=-2, C=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2+2}{x+2}=A(x-1)+B+\frac{C(x-1)}{x+2}, when\ x=1, B=1$$

这种方法不能求解A，因为没法消除B项。但是可以使用古老的代数法求解，随便找一个数字，代入即可，这里令x = 0，等式变为：

$$\frac{0^2+2}{(0-1)^2(0+2)}=\frac{A}{0-1}+\frac{1}{(0-1)^2}+\frac{2/3}{0+2}$$

$$A=\frac{1}{3}$$

最终：

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\ln|x+2|+C$$

无法线性展开的高次分式

将分母的多项式因式分解后，如果每个因式的最高次项都是1次，则称该多项式可以线性展开，如 $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$，对于不能线性展开的多项分式如何求解呢？

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^3-x^2+x+1}}\boldsymbol{dx} = ?$$

首先是仍然是因式分解：

$$x^3-x^2+x+1=(x-1)(x^2+1)$$

然后要将部分分式展开，与之前不同，分子要加入一次项：

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

用选定系数法求出A：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

$$\frac{x^2}{x^2+1} = A + \frac{Bx+C}{x^2+1}(x-1)$$

$$when\ x=1, \qquad A = \frac{1}{2}$$

接下来要设法求解B和C，先将分母全部消去：

$$x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

此时我们观察等式最高次项的次数，右侧展开后会得到$Ax^2 + Bx^2$，等式左右两边的高次项系数应当相等：

$$x^2 = Ax^2 + Bx^2 + \cdots = \frac{1}{2}x^2 + Bx^2 + \cdots$$

由于省略号代表的表达式中将不会出现x^2，故B = 1/2，代入可求得C = 1/2

最后求解积分：

$$\int \frac{x^2}{x^3-x^2+x+1}dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

现在面对的就是积分问题了，所以并不是说部分分式展开就万事大吉。第一部分很容易求解，答案是(ln|x - 1|)/2，第二部分可用猜测法求得原函数($\ln(x^2 + 1)$)/4，第三部分需要借助三角替换，令x = tanθ

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dtan\theta}{tan^2\theta+1} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{sec^2\theta} = \int d\theta = arctanx + C$$

最终：

$$\int \frac{x^2}{x^3-x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}arctanx + C$$

处理假分式

如果P(x)的次数大于Q(x)的次数，多项式就是一个假分式，这类问题只要将其变为真分式就可以处理。

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3}}{(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+2})}\boldsymbol{dx} = ?$$

与部分分式相反，第一步是计算多项式：

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3}{x^2+x-2}$$

用除法将其变为真分式，这个过程实际上是将小学学过的除法竖式应用于多项式：

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+x-2 \,\big/\, \overline{x^3} \\ -\quad x^3+x^2-2x \\ \hline -x^2+2x \\ -\quad -x^2-x+2 \\ \hline 3x-2 \end{array}$$

商是x – 1，余数是3x – 2，所以：

$$\frac{x^3}{x^2+x-2}=x-1+\frac{3x-2}{x^2+x-2}$$

又看到了部分分式：

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2}=\frac{3x-2}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{3x-2}{x-1}=A+\frac{B}{x-1}(x+2), when\ x=-2, A=\frac{8}{3}$$

$$\frac{3x-2}{x+2}=\frac{A}{x+2}(x-1)+B, when\ x=1, B=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{(x-1)(x+2)}dx&=\int\frac{x^3}{x^2+x-2}dx\\&=\int\left(x-1+\frac{3x-2}{x^2+x-2}\right)dx\\&=\int\left(x-1+\frac{8/3}{x+2}+\frac{1/3}{x-1}\right)dx\\&=\frac{x^2}{2}-x+\frac{8}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

超级复杂的积分

被积函数作为部分分式展开：

$$\int\frac{\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}+2)^4(\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}+3)(\boldsymbol{x}^2+4)^3}\boldsymbol{dx}=?$$

一共有12个未知数，正好和部分分式的最高次数相同。这里并不打算求解这些未知数，只是用该列表示我们可以处理复杂的有理数积分。

然而即便展开了部分分式，仍然会面临复杂的积分处理。这个例子将会遇到下面的积分：

$$\frac{x}{(x+2)^4(x^2+2x+3)(x^2+4)^3}$$
$$=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}+\frac{A_4}{(x+2)^4}+\frac{B_0x+C_0}{x^2+2x+3}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+4}$$
$$+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3}$$

一共有12个未知数，正好和部分分式的最高次数相同。这里并不打算求解这些未知数，只是用该列表示我们可以处理复杂的有理数积分。

然而即便展开了部分分式，仍然会面临复杂的积分处理。这个例子将会遇到下面的积分：

$$\frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3}\to\int\frac{x}{(x^2+4)^3}dx+\int\frac{1}{(x^2+4)^3}dx=\frac{(x^2+4)^{-2}}{4}+C$$
$$\int\frac{x}{(x^2+4)^3}dx=\frac{(x^2+4)^{-2}}{4}+C$$
$$\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\int\frac{dtan\theta}{(2tan\theta)^2+4)^3}$$
$$=\int\frac{sec^2\theta d\theta}{(4sec^2\theta)^3}$$
$$=\frac{1}{32}\int cos^4\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{32}\int\left(\frac{1+cos^2 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$
$$=\cdots$$

$$\frac{B_0x+C_0}{x^2+2x+3}\to\int\frac{x}{x^2+2x+3}dx$$
$$=\int\frac{x}{(1+x)^2+2}dx$$
$$=2\int\frac{x}{\left(\frac{(1+x)\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}dx$$
$$=2\int\frac{\sqrt{2}u-1}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}du,\quad u=\frac{(1+x)\sqrt{2}}{2},x=\sqrt{2}u-1$$
$$=\int\frac{2u}{u^2+1}du-\int\frac{\sqrt{2}}{u^2+1}du$$
$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=\ln(u^2+1)$$
$$\int\frac{\sqrt{2}}{u^2+1}du=\int\frac{\sqrt{2}\,sec^2\theta}{tan^2\theta+1}d\theta=\cdots$$

没完没了了，应该放弃计算，交给计算机处理，只要知道计算思路即可。

示例

示例1

$$\int \frac{x^2-4x+4}{x^2-8x}dx=?$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-8x}=1+\frac{4x+4}{x^2-8x}=1+\frac{4(x+1)}{x(x-8)}$$

$$\frac{x+1}{x(x-8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-8}=>\frac{x+1}{x}=\frac{A(x-8)}{x}+B, when\ x=8, B=\frac{9}{8}$$

$$\frac{x+1}{x-8}=A+\frac{Bx}{x-8}, when\ x=0, A=\frac{-1}{8}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-4x+4}{x^2-8x}dx &= \int\left(1+4\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x}+\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x-8}\right)\right)dx\\ &= \int dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx+\frac{9}{2}\int\frac{1}{x-8}dx\\ &= x-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{9}{2}\ln|x-8|+C\end{aligned}$$

示例2

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^4}dx=?$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{(x+1)^4}$$

$$x^2=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)+D$$

$$when\ x=-1, D=1$$

$\because$ 等式左侧没有x^3

$\therefore$ 等式右侧x^3的系数为 0，即$A=0$

将 A、D 代入等式后$x^2=B(x+1)^2+C(x+1)+1$，同理可得$B=1$

最后 $C=-2$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(x+1)^4}dx &= \int\frac{0}{x+1}dx+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{-2dx}{(x+1)^3}+\int\frac{dx}{(x+1)^4}\\ &= \ln|x+1|-(x+1)^{-1}+(x+1)^{-2}-\frac{1}{3}(x+1)^{-3}+C\end{aligned}$$

示例3

$$\int \frac{2x+2}{(4x^2+1)^2}dx=?$$

令 $u = 2x, \qquad dx = du/2$

$$\int \frac{2x+2}{(4x^2+1)^2} dx = \int \frac{u+2}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{(u^2+1)^2} du + \int \frac{2}{(u^2+1)^2} du\right)$$

令 $u = tan\theta = 2x, \ \ du = dtan\theta = sec^2\theta d\theta$

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^2} du + \int \frac{2}{(u^2+1)^2} du$$

$$= \int \frac{tan\theta}{(sec^2\theta)^2} sec^2\theta d\theta + \int \frac{2}{(sec^2\theta)^2} sec^2\theta d\theta$$

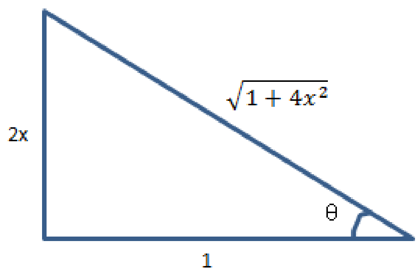
$$= \int \frac{tan\theta}{sec^2\theta} d\theta + \int \frac{2}{sec^2\theta} d\theta$$

$$= \int sin\theta cos\theta d\theta + \int 2cos^2\theta d\theta$$

$$= \int sin\theta dsin\theta + \int (1 + cos2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} sin^2\theta + \theta + \frac{1}{2} sin2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2} sin^2\theta + \theta + sin\theta cos\theta + C$$



tanθ=2x

$$\frac{1}{2} sin^2\theta + \theta + sin\theta cos\theta + C = \frac{4x^2}{2(1+4x^2)} + arctan2x + \frac{2x}{1+4x^2} + C$$

$$= \frac{2x^2+2x}{1+4x^2} + arctan2x$$

示例4

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x^2-1)^2} dx = ?$$

$$\frac{x^3-3x^2+7x-1}{(x^2-1)^2}=\frac{x^3-3x^2+7x-1}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

$$等式左右两边同时乘以(x+1)^2, when\ x=-1, D=-3$$

$$同理可得 A=0, B=1, C=1$$

$$\int\frac{x^3-3x^2+7x-1}{(x^2-1)^2}dx$$

$$=\int\frac{0}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{-3}{(x+1)^2}dx$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"

随笔

分类: 单变量微积分

标签: 部分分式

« 上一篇： 单变量微积分笔记22——三角替换3（反向替换和配方）
» 下一篇： 单变量微积分笔记24——分部积分

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

最新新闻：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人： 本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...