

# 我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

### 导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

### 公告

你的支持是我的动力  
欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称: 我是8位的  
园龄: 4年7个月  
粉丝: 288  
关注: 5  
[+加关注](#)

**盖楼抽奖**  
#她的梦想在发光#  
**HWD科技女性故事有奖征集**  
分享最打动的科技女性故事  
活动时间: 2022年3月8日-3月18日  
[马上参与](#)

### 搜索

### 常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

### 积分与排名

积分 - 457097  
排名 - 1198

## 单变量微积分笔记23——部分分式

求解被积函数是部分分式 $P(x)/Q(x)$ 的积分,  $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是关于 $x$ 多项式。如果不能求出这类积分的原函数, 结果将令人沮丧, 现在我们要试图寻找一个有效的方法求解这类问题。

### 选定系数法

$$\int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = ?$$

这个很容易:

$$\int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{x+2} dx = \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + C$$

但是如果将其写成:  $\int \frac{4x-1}{x^2+x-2} dx$  看起来就不那么容易求解了。这就要求我们能够去掉部分分式的伪装, 也就是展开部分分式, 变成我们熟悉的被积函数。

首先对被积函数的分母进行因式分解, 利用初中的十字相乘法:

$$\frac{4x-1}{x^2+x-2} = \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}$$

再将其拆分为新的等式:

$$\frac{4x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

最后再求出 $A$ 和 $B$ , 这需要一点技巧。现将等式两边都乘以 $x-1$ , 以便消去其中一个分式的分母:

$$\frac{4x-1}{x+2} = A + \frac{B(x-1)}{x+2}$$

将 $x = 1$ 代入等式, 这样就可以消去 $B$ 的分式, 直接求得 $A$ :

$$\frac{4-1}{1+2} = A, \quad A = 1$$

用同样的方法可求得 $B = 3$ 。于是:

$$\int \frac{4x-1}{x^2+x-2} dx = \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| + C$$

掩盖法能够工作必须满足两个条件:

1.  $Q(x)$ 能够被因式分解;
2.  $P(x)$ 的最高次数 <  $Q(x)$ 的最高次数

## 随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)  
Java并发编程(1)  
程序员的数学(24)  
单变量微积分(31)  
多变量微积分(24)  
概率(24)  
机器学习(27)  
软件设计(1)  
数据分析(6)  
数据结构与算法(27)  
随笔(5)  
线性代数(34)  
项目管理(2)  
转载(4)

## 随笔档案 (205)

2021年2月(1)  
2020年3月(2)  
2020年2月(6)  
2020年1月(4)  
2019年12月(7)  
2019年11月(15)  
2019年9月(3)  
2019年8月(6)  
2019年7月(1)  
2019年6月(8)  
2019年5月(3)  
2019年4月(5)  
2019年3月(7)  
2019年2月(3)  
2019年1月(7)  
更多

## 阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

## 评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

## 推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

## 最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)  
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°  
--猫猫猫猫大人

## 展开部分分式

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x+2)} dx = ?$$

这里不能直接展开成:  $\frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+2}$ , 这是无法求解的。对于分母是高层次的部分分式, 其展开的形态应当型如:

$$\frac{A}{(x+1)^3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3}$$

所以:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)^2} = \frac{A(x+2)}{x-1} + \frac{B(x+2)}{(x-1)^2} + C, \text{ when } x = -2, C = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x^2 + 2}{x+2} = A(x-1) + B + \frac{C(x-1)}{x+2}, \text{ when } x = 1, B = 1$$

这种方法不能求解A, 因为没法消除B项。但是可以使用古老的代数法求解, 随便找一个数字, 代入即可, 这里令 $x = 0$ , 等式变为:

$$\frac{0^2 + 2}{(0-1)^2(0+2)} = \frac{A}{0-1} + \frac{1}{(0-1)^2} + \frac{2/3}{0+2}$$

$$A = \frac{1}{3}$$

最终:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x-1)^2(x+2)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3} \ln|x+2| + C \end{aligned}$$

## 无法线性展开的高次分式

将分母的多项式因式分解后, 如果每个因式的最高次项都是1次, 则称该多项式可以线性展开, 如  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ , 对于不能线性展开的多项式如何求解呢?

$$\int \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x + 1} dx = ?$$

首先是仍然是因式分解:

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2 + 1)$$

然后将部分分式展开, 与之前不同, 分子要加入一次项:

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

用选定系数法求出A:

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$  与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = A + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}(x - 1)$$

$$\text{when } x = 1, \quad A = \frac{1}{2}$$

接下来要设法求解B和C，先将分母全部消去：

$$x^2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

此时我们观察等式最高次项的次数，右侧展开后会得到 $Ax^2 + Bx^2$ ，等式左右两边的高次项系数应当相等：

$$x^2 = Ax^2 + Bx^2 + \dots = \frac{1}{2}x^2 + Bx^2 + \dots$$

由于省略号代表的表达式中将不会出现 $x^2$ ，故 $B = 1/2$ ，代入可求得 $C = 1/2$

最后求解积分：

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x + 1} dx &= \int \left( \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int \left( \frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \end{aligned}$$

现在面对的就是积分问题了，所以并不是说部分分式展开就万事大吉。第一部分很容易求解，答案是 $(\ln|x-1|)/2$ ，第二部分可用猜测法求得原函数 $(\ln(x^2+1))/4$ ，第三部分需要借助三角替换，令 $x = \tan\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{d\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \int d\theta = \arctan x + C$$

最终：

$$\int \frac{x^2}{x^3 - x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x^2+1| + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

## 处理假分式

如果 $P(x)$ 的次数大于 $Q(x)$ 的次数，多项式就是一个假分式，这类问题只要将其变为真分式就可以处理。

$$\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} dx = ?$$

与部分分式相反，第一步是计算多项式：

$$\frac{x^3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3}{x^2+x-2}$$

用除法将其变为真分式，这个过程实际上是将小学学过的除法竖式应用于多项式：

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x^2+x-2 \overline{) x^3} \\ \underline{-(x^3+x^2-2x)} \phantom{+2} \\ -x^2+2x \phantom{+2} \\ \underline{-(x^2-x+2)} \\ 3x-2 \end{array}$$

商是 $x-1$ ，余数是 $3x-2$ ，所以：

$$\frac{x^3}{x^2+x-2} = x-1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2}$$

又看到了部分分式：

$$\frac{3x-2}{x^2+x-2} = \frac{3x-2}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{3x-2}{x-1} = A + \frac{B}{x-1}(x+2), \text{ when } x = -2, A = \frac{8}{3}$$

$$\frac{3x-2}{x+2} = \frac{A}{x+2}(x-1) + B, \text{ when } x = 1, B = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} dx &= \int \frac{x^3}{x^2+x-2} dx \\ &= \int \left( x-1 + \frac{3x-2}{x^2+x-2} \right) dx \\ &= \int \left( x-1 + \frac{8/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{8}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

## 超级复杂的积分

被积函数作为部分分式展开：

$$\int \frac{x}{(x+2)^4(x^2+2x+3)(x^2+4)^3} dx = ?$$

一共有12个未知数，正好和部分分式的最高次数相同。这里并不打算求解这些未知数，只是用该列表示我们可以处理复杂的有理数积分。

然而即便展开了部分分式，仍然会面临复杂的积分处理。这个例子将会遇到下面的积分：

$$\frac{x}{(x+2)^4(x^2+2x+3)(x^2+4)^3}$$

$$= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{A_4}{(x+2)^4} + \frac{B_0x+C_0}{x^2+2x+3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+4}$$

$$+ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3}$$

一共有12个未知数，正好和部分分式的最高次数相同。这里并不打算求解这些未知数，只是用该列表示我们可以处理复杂的有理数积分。

然而即便展开了部分分式，仍然会面临复杂的积分处理。这个例子将会遇到下面的积分：

$$\frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3} \rightarrow \int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx + \int \frac{1}{(x^2+4)^3} dx = \frac{(x^2+4)^{-2}}{4} + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+4)^3} dx = \frac{(x^2+4)^{-2}}{4} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^3} = \int \frac{d\tan\theta}{(2\tan\theta)^2+4)^3}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{(4\sec^2\theta)^3}$$

$$= \frac{1}{32} \int \cos^4\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{32} \int \left(\frac{1+\cos^2 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \dots$$

$$\frac{B_0x+C_0}{x^2+2x+3} \rightarrow \int \frac{x}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \int \frac{x}{(1+x)^2+2} dx$$

$$= 2 \int \frac{x}{\left(\frac{(1+x)\sqrt{2}}{2}\right)^2+1} dx$$

$$= 2 \int \frac{\sqrt{2}u-1}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} du, \quad u = \frac{(1+x)\sqrt{2}}{2}, x = \sqrt{2}u-1$$

$$= \int \frac{2u}{u^2+1} du - \int \frac{\sqrt{2}}{u^2+1} du$$

$$\int \frac{2u}{u^2+1} du = \ln(u^2+1)$$

$$\int \frac{\sqrt{2}}{u^2+1} du = \int \frac{\sqrt{2} \sec^2\theta}{\tan^2\theta+1} d\theta = \dots$$

没完没了了，应该放弃计算，交给计算机处理，只要知道计算思路即可。

## 示例

### 示例1

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 8x} dx = ?$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 8x} = 1 + \frac{4x + 4}{x^2 - 8x} = 1 + \frac{4(x+1)}{x(x-8)}$$

$$\frac{x+1}{x(x-8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-8} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{A(x-8)}{x} + B, \text{ when } x=8, B = \frac{9}{8}$$

$$\frac{x+1}{x-8} = A + \frac{Bx}{x-8}, \text{ when } x=0, A = -\frac{1}{8}$$

$$\int \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 8x} dx = \int \left( 1 + 4 \left( -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x} + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{x-8} \right) \right) dx$$

$$= \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x-8} dx$$

$$= x - \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{9}{2} \ln|x-8| + C$$

### 示例2

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^4} dx = ?$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4}$$

$$x^2 = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) + D$$

$$\text{when } x = -1, D = 1$$

∵ 等式左侧没有  $x^3$

∵ 等式右侧  $x^3$  的系数为 0, 即  $A = 0$

将 A、D 代入等式后  $x^2 = B(x+1)^2 + C(x+1) + 1$ , 同理可得  $B = 1$

最后  $C = -2$

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^4} dx = \int \frac{0}{x+1} dx + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{-2dx}{(x+1)^3} + \int \frac{dx}{(x+1)^4}$$

$$= \ln|x+1| - (x+1)^{-1} + (x+1)^{-2} - \frac{1}{3}(x+1)^{-3} + C$$

### 示例3

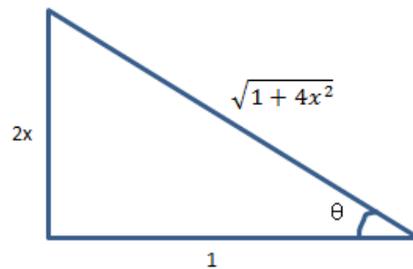
$$\int \frac{2x+2}{(4x^2+1)^2} dx = ?$$

$$\text{令 } u = 2x, \quad dx = du/2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+2}{(4x^2+1)^2} dx &= \int \frac{u+2}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{u}{(u^2+1)^2} du + \int \frac{2}{(u^2+1)^2} du \right) \end{aligned}$$

$$\text{令 } u = \tan\theta = 2x, \quad du = d\tan\theta = \sec^2\theta d\theta$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{u}{(u^2+1)^2} du + \int \frac{2}{(u^2+1)^2} du \\ &= \int \frac{\tan\theta}{(\sec^2\theta)^2} \sec^2\theta d\theta + \int \frac{2}{(\sec^2\theta)^2} \sec^2\theta d\theta \\ &= \int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta} d\theta + \int \frac{2}{\sec^2\theta} d\theta \\ &= \int \sin\theta \cos\theta d\theta + \int 2\cos^2\theta d\theta \\ &= \int \sin\theta d\sin\theta + \int (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin^2\theta + \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{1}{2} \sin^2\theta + \theta + \sin\theta \cos\theta + C \end{aligned}$$



$$\tan\theta = 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin^2\theta + \theta + \sin\theta \cos\theta + C &= \frac{4x^2}{2(1+4x^2)} + \arctan 2x + \frac{2x}{1+4x^2} + C \\ &= \frac{2x^2 + 2x}{1+4x^2} + \arctan 2x \end{aligned}$$

#### 示例4

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x^2 - 1)^2} dx = ?$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

等式左右两边同时乘以 $(x+1)^2$ , when  $x = -1, D = -3$

同理可得  $A = 0, B = 1, C = 1$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$= \int \frac{0}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x-1} + \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [部分分式](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

1

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记22——三角替换3 \(反向替换和配方\)](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记24——分部积分](#)

posted on 2017-11-21 22:25 我是8位的 阅读(3200) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

WebForms升级到ASP.NET Core  
fineui.com

**编辑推荐:**

- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#  
**HWD科技女性故事有奖征集**  
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

**最新新闻:**

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
- 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
- Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够买菜
- » 更多新闻...

Powered by:  
博客园

Copyright © 2022 我是8位的  
Powered by .NET 6 on Kubernetes